Anais do Congresso Brasileiro de Iniciação Científica
(https://periodicos.unisanta.br/COB)

ISSN 2317-1316

COMPOSIÇÃO PARALELA COMO PRODUTO MONOIDAL NA CATEGORIA LEARN

PARALLEL COMPOSITION AS A MONOIDAL PRODUCT IN THE LEARN CATEGORY

Kauã Santana da Silva, Alexandre Garcia de Oliveira

FATEC Baixada Santista Rubens Lara, Curso de Tecnologia em Ciência de Dados
E-mail para contato: kaua.silva@aluno.cps.sp.gov.br

RESUMO – Este trabalho caracteriza a composição paralela em Learn como produto monoidal de aprendizes. Deduzem-se o produto dos espaços de parâmetros, as funções de predição, atualização e requisição e a lei de troca com a composição sequencial. Como aplicação ilustrativa, constrói-se um bloco residual por cópia e soma; a dedução mostra que o ramo aprendido recebe o alvo residual $y - x$. A análise é formal e não avalia convergência nem desempenho preditivo.

Palavras-chave: Teoria das Categorias; Aprendizado supervisionado; Composição paralela; Categoria Learn; Blocos residuais.

ABSTRACT – This work characterizes parallel composition in Learn as the monoidal product of learners. It derives the product parameter space, the prediction, update and request maps, and the interchange law with sequential composition. As an illustrative application, it constructs a residual block using copying and summing maps; the derivation shows that the learned branch receives the residual target $y - x$. This formal analysis does not evaluate convergence or predictive performance.

Keywords: Category Theory; Supervised learning; Parallel composition; Learn category; Residual blocks.

1 INTRODUÇÃO

Fong, Spivak e Tuyéras (2019) formalizam um aprendiz supervisionado como morfismo da categoria *Learn*, equipado com espaço de parâmetros e funções de predição, atualização e requisição. Sob condições adequadas sobre a função de erro e o passo, a descida do gradiente define um funtor monoidal para essa categoria, dando uma interpretação composicional à retropropagação.

ISSN 2317-1316

O foco deste trabalho é caracterizar a composição paralela como ação do produto monoidal em *Learn*. Para $f: A \to B$ e $g: C \to D$, essa operação forma um aprendiz $A \times C \to B \times D$; são deduzidos seu espaço de parâmetros e suas funções, além da lei de troca com a composição sequencial. O bloco residual aparece apenas como aplicação ilustrativa dos morfismos de roteamento. A análise é dedutiva e não avalia resultados empíricos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A categoria Learn

Segundo Fong, Spivak e Tuyéras (2019), um morfismo $f: A \to B$ em *Learn* é uma classe de equivalência de quádruplas (P, I, U, r). Aqui, P é o espaço de parâmetros, $I: P \times A \to B$ é a predição, $U: P \times A \times B \to P$ é a atualização e $r: P \times A \times B \to A$ é a requisição de entrada: diante de um alvo em B, ela encaminha à etapa anterior uma entrada corrigida, não necessariamente uma inversa exata de I. A equivalência identifica quádruplas relacionadas por uma bijeção de espaços de parâmetros que preserva essas três funções.

Na composição sequencial, a atualização do primeiro aprendiz usa como alvo intermediário a requisição produzida pelo segundo. Sob a interpretação por descida do gradiente, essa propagação de requisições corresponde ao mecanismo de retropropagação (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019). A lei será usada aqui apenas para explicitar a compatibilidade com a composição paralela.

2.2 Estrutura monoidal e composição paralela

Em *Learn*, os objetos são conjuntos e o produto monoidal dos objetos é o produto cartesiano, com o conjunto unitário como unidade. A operação induzida nos morfismos é precisamente a composição paralela: $f \otimes g := f \parallel g$. Os isomorfismos canônicos de produtos fornecem associatividade, unidade e simetria, de modo que as leis são entendidas sob essas identificações canônicas (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo é teórico-dedutivo, fruto de uma pesquisa de iniciação científica. A partir da definição de morfismo em *Learn*, derivam-se as funções da composição paralela e verifica-se sua compatibilidade com a composição sequencial. Em seguida, usa-se um bloco residual

ISSN 2317-1316

apenas para ilustrar como a composição paralela pode ser combinada com roteamento. Não são avaliados dados, convergência ou desempenho preditivo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Produto monoidal: composição paralela

Sejam $f: A \to B$ e $g: C \to D$ morfismos de *Learn*, com espaços de parâmetros P_f e P_g. Seu produto monoidal, denotado $f \parallel g$, é um morfismo $A \times C \to B \times D$. A construção combina os aprendizes preservando a estrutura de cada componente: os parâmetros formam um produto, e predição, atualização e requisição são calculadas componente a componente. As Equações (1) a (4) definem essa operação (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019); a

Figura 1 a representa:

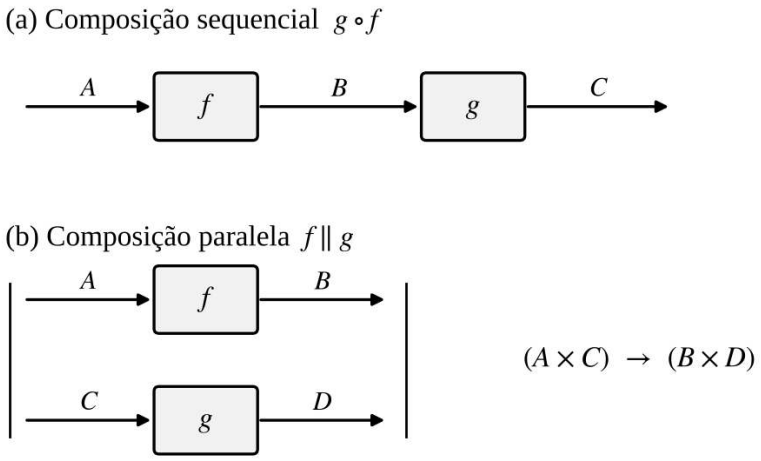
$$P_{f \parallel g} = P_f \times P_g \tag{1}$$

$$I_{f \parallel g}(p, q, a, c) = (I_f(p, a), I_g(q, c)) \tag{2}$$

$$U_{f \parallel g}(p, q, a, c, b, d) = (U_f(p, a, b), U_g(q, c, d)) \tag{3}$$

$$r_{f \parallel g}(p, q, a, c, b, d) = (r_f(p, a, b), r_g(q, c, d)) \tag{4}$$

Figura 1: Composição sequencial (a) e composição paralela (b) de morfismos



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Dados $f: A \to B$, $g: B \to E$, $f': C \to D$ e $g': D \to F$, a compatibilidade entre as composições sequencial e paralela é expressa pela lei de troca da Equação (5), como igualdade

ISSN 2317-1316

de morfismos sob as identificações canônicas dos produtos de parâmetros (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019):

$$(g \circ f) \parallel (g' \circ f') = (g \parallel g') \circ (f \parallel f') \quad (5)$$

As Equações (1) a (4) caracterizam a ação do produto monoidal nos morfismos: cada componente depende apenas de seu próprio parâmetro, entrada e alvo. Assim, a operação mantém os aprendizes independentes, enquanto a lei de troca garante que a composição desses produtos respeite o encadeamento sequencial. A operação, por si só, não cria comunicação entre os ramos; o exemplo a seguir mostra como essa interação pode ser acrescentada por roteamento.

4.2 Implementação em Haskell

Na implementação desenvolvida, o produto dos espaços de parâmetros é representado pela concatenação de listas heterogêneas indexadas no nível de tipos. Assim, o operador `(//)` recebe dois aprendizes e produz um aprendiz sobre pares de entradas e saídas, com os parâmetros concatenados. O Código 1 mostra o núcleo da definição:

Código 1: Operador de composição paralela em Haskell

```
infixr 3 (//)
(//) :: Learner ps a b -> Learner qs c d
     -> Learner (ps ++ qs) (a, c) (b, d)
(//) (Learner i' u' r' params') (Learner i'' u'' r'' params'') = Learner
    { i = \params (a, c) ->
        let p = projectFirst params' params'' params
            q = projectRest  params' params'' params
        in (i' p a, i'' q c)

    , u = \params (a, c) (b, d) ->
        let p  = projectFirst params' params'' params
            q  = projectRest  params' params'' params
            p' = u' p a b
            q' = u'' q c d
        in unify p' q'

    , r = \params (a, c) (b, d) ->
        let p     = projectFirst params' params'' params
            q     = projectRest  params' params'' params
            a_req = r' p a b
            c_req = r'' q c d
        in (a_req, c_req)

    , iniParam = unify params' params''
    }
```

As funções auxiliares `projectFirst` e `projectRest` separam os parâmetros de cada ramo, e `unify` os recompõe após a atualização. Suas definições foram omitidas do trecho. Na representação atual, essas auxiliares recorrem a `unsafeCoerce`: o GHC não reduz algumas igualdades das listas de tipos quando seus índices são abstratos. Portanto, a correspondência

ISSN 2317-1316

entre índices e valores dos parâmetros é uma invariante da implementação, não uma propriedade comprovada pelo sistema de tipos.

4.3 Aplicação ilustrativa: bloco residual

Como aplicação ilustrativa, considere a conexão residual de He et al. (2016) para um aprendiz $f: V \to V$, com $V = \mathbb{R}^n$. A construção aplica f a uma cópia da entrada e soma sua saída ao ramo identidade. Para a função de erro quadrático $e(u, v) = \frac{1}{2}\|u - v\|^2$, os morfismos sem parâmetros de soma $\mu: V \times V \to V$ e cópia $\delta: V \to V \times V$ têm as predições e requisições da Tabela 1 (FONG; SPIVAK; TUYÉRAS, 2019, Proposição V.1):

Tabela 1: Morfismos de soma e cópia usados no exemplo residual

Morfismo	**Predição** I	**Requisição** r
μ	$I_\mu(a_1, a_2) = a_1 + a_2$	$r_\mu((a_1, a_2), a_3) = (a_3 - a_2, a_3 - a_1)$
δ	$I_\delta(a) = (a, a)$	$r_\delta(a_1, (a_2, a_3)) = a_2 + a_3 - a_1$

Fonte: Adaptado de Fong, Spivak e Tuyéras (2019, Proposição V.1).

Em *Learn*, o bloco resultante é:

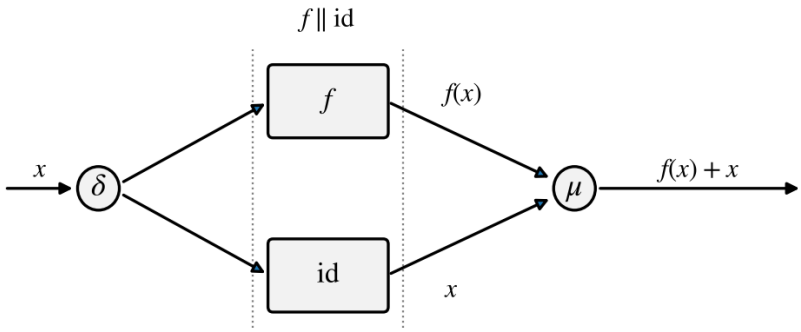
$$R_f = \mu \circ (f \parallel \mathrm{id}_V) \circ \delta \tag{6}$$

Na implementação, a mesma construção é expressa pela composição de cópia, aprendiz em paralelo com a identidade e soma:

Código 2: Exemplo de composição paralela em um bloco residual

```
residualBlock :: Learner ps Double Double -> Learner ps Double Double
residualBlock f = unsafeCoerce $ monoid . (f // id) . comonoid
```

Figura 2: Bloco residual construído por composição paralela e roteamento



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

ISSN 2317-1316

Na composição da Equação (6), δ, id_V e μ têm espaço de parâmetros unitário; portanto, $P_{R_f} \cong P_f$. Aplicando as leis sequencial e paralela e as requisições da Tabela 1, com $r_{\mathrm{id}_V}(x,t) = t$, obtêm-se, para entrada $x \in V$ e alvo $y \in V$:

$$I_{R_f}(p,x) = I_f(p,x) + x \tag{7}$$

$$U_{R_f}(p,x,y) = U_f(p,x,y-x) \tag{8}$$

$$r_{R_f}(p,x,y) = r_f(p,x,y-x) + y - I_f(p,x) - x \tag{9}$$

As Equações (7) a (9) dão as três funções do bloco. Se $b = I_f(p,x)$, a soma solicita $(y - x, y - b)$ aos ramos f e identidade. Portanto, f recebe o alvo residual $y - x$, enquanto a cópia encaminha a requisição $r_f(p,x,y-x) + y - b - x$ à entrada do bloco.

4.4 Escopo e limitações

O exemplo pressupõe $f: V \to V$ e não demonstra convergência nem vantagem preditiva. Na composição do Código 2, os morfismos de roteamento não têm parâmetros, o que exige compatibilizar o índice $ps + +[]$ com ps. Embora a lista vazia seja neutra, a família de tipos de concatenação recursa no primeiro argumento; por isso, o GHC não reduz essa igualdade quando ps é abstrato. O `unsafeCoerce` contorna a limitação, mas a correspondência entre os índices e os valores dos parâmetros não é comprovada estaticamente. Esse recurso é próprio da representação adotada e não integra a construção categorial.

5 CONCLUSÃO

A composição paralela é o produto monoidal de morfismos em *Learn*: combina os espaços de parâmetros por produto e define predição, atualização e requisição componente a componente. A lei de troca mostra sua compatibilidade com a composição sequencial. O bloco residual ilustra, de modo secundário, como essa operação pode ser combinada com cópia e soma. A análise não implica convergência nem desempenho empírico. Como continuidade, propõe-se refatorar a representação dos parâmetros em Haskell para provar as leis de identidade e associatividade da concatenação sem `unsafeCoerce`.

ISSN 2317-1316

6 DECLARAÇÃO DE USO DE IA

Declaração de Uso de IA: Durante a elaboração deste trabalho, utilizou-se a ferramenta Prism, da OpenAI, para auxílio na escrita do artigo. O conteúdo gerado foi revisado, editado e validado pelos autores, que assumem total responsabilidade pelo texto final.

7 REFERÊNCIAS

FONG, Brendan; SPIVAK, David I.; TUYÉRAS, Rémy. Backprop as functor: a compositional perspective on supervised learning. In: ANNUAL ACM/IEEE SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE, 34., 2019, Vancouver. **Proceedings** [...]. [S. l.]: IEEE, 2019. p. 1-13. DOI: 10.1109/LICS.2019.8785665. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1711.10455. Acesso em: 16 out. 2026.

HE, Kaiming; ZHANG, Xiangyu; REN, Shaoqing; SUN, Jian. Deep residual learning for image recognition. In: IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION, 2016, Las Vegas. **Proceedings** [...]. [S. l.]: IEEE, 2016. p. 770-778.