ISSN:2594-6153

Modelagem matemática distribuída e estabilização por SDRE de um rotor flexível com mancais magnéticos ativos

Eduardo dos Santos Sousa

UNISANTA - Universidade Santa Cecília - Santos-SP, Brasil.

E-mail: eduardosousa.eds@gmail.com

Resumo: Este trabalho apresenta a modelagem energética e a estabilização numérica de um rotor flexível suportado por mancais magnéticos ativos. O eixo segue Euler–Bernoulli com deformação axial de von Kármán e é discretizado por diferenças finitas em 21 nós. Para uma condição orbital não linear com amplitude de 5 mm e ηg=0,173, a planta sem controle atingiu o limite do entreferro em 0,002 s. Com SDRE o rotor completou 4 s e descreveu uma espiral elíptica convergente; nos 5% finais, $|u_d|$ e $|v_d|$ permaneceram abaixo de 0,0127 e 0,0185 mm. Os resultados demonstram retorno local da resposta distribuída à vizinhança do equilíbrio.
Palavras-chave: dinâmica de rotores; eixo flexível; mancais magnéticos ativos; modelagem energética; estabilização.

Distributed Mathematical Modeling and SDRE Stabilization of a Flexible Rotor with Active Magnetic Bearings

Abstract: This study presents the energy-based modeling and numerical stabilization of a flexible rotor supported by active magnetic bearings. The Euler–Bernoulli shaft includes von Kármán axial strain and is discretized by finite differences using 21 nodes. For a nonlinear orbital initial condition with 5 mm amplitude and ηg=0.173, the uncontrolled plant reached the air-gap limit at 0.002 s. With SDRE, the rotor completed 4 s and described a converging elliptical spiral; over the final 5%, $|u_d|$ and $|v_d|$ remained below 0.0127 and 0.0185 mm. The results demonstrate local return near equilibrium.
Keywords: rotor dynamics; flexible shaft; active magnetic bearings; energy modeling; stabilization.

Introdução

Rotores flexíveis estão presentes em turbomáquinas, compressores e geradores. A interação entre a flexibilidade do eixo, a inércia dos discos e as forças dos mancais determina as velocidades críticas e a resposta vibratória [1]. Modelos concentrados são úteis em análises preliminares, mas não descrevem diretamente a evolução espacial da linha deformada do eixo.

Mancais magnéticos ativos, ou *active magnetic bearings* (AMBs), sustentam o rotor sem contato por forças eletromagnéticas reguladas. A força depende da corrente e do entreferro, e a suspensão polarizada em malha aberta apresenta rigidez de posição desestabilizante [2]. Sua operação requer realimentação capaz de manter o eixo próximo ao centro dos mancais.

A formulação energética reúne flexão, estiramento axial, dinâmica do disco, dissipação e ações magnéticas. O princípio de Hamilton fornece as equações antes da discretização [3]. Uma condição inicial com contribuição geométrica relevante é aplicada ao rotor sem controle e com SDRE [5]. O estudo é local e não pretende demonstrar estabilidade global ou robustez.

Objetivos

Apresentar a modelagem energética distribuída do rotor e verificar numericamente se o SDRE reconduz ao equilíbrio uma resposta geometricamente não linear que, sem controle, perde a margem do entreferro.

Material e Métodos

O sistema possui eixo esbelto uniforme de comprimento L, disco rígido em z=z_d e AMBs radiais nas extremidades. A Figura 1 apresenta a geometria e os graus de liberdade.

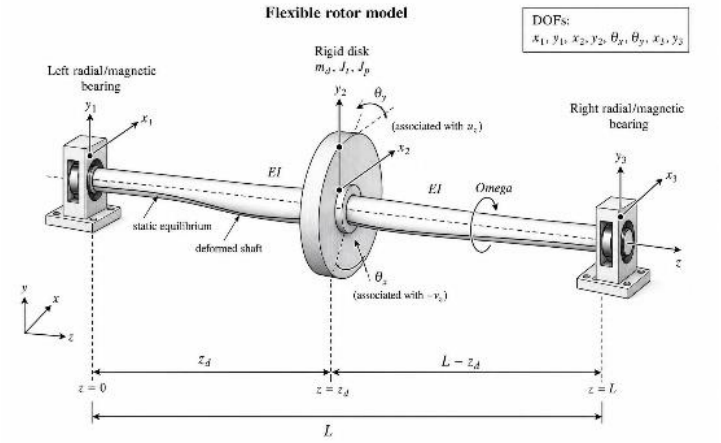

Figura 1. Modelo do rotor flexível, sistema de coordenadas, disco rígido concentrado e mancais magnéticos radiais.

Pela cinemática de Euler–Bernoulli, as seções permanecem planas e normais à linha elástica. Para um ponto material inicialmente localizado em (x,y,z), o campo de deslocamentos e as rotações de flexão são reunidos no bloco [3,6].

$$\begin{aligned} U_x(x,y,z,t) &= u(z,t), \quad U_y(x,y,z,t) = v(z,t), \\ U_z(x,y,z,t) &= w(z,t) - x\,u_{,z}(z,t) - y\,v_{,z}(z,t), \\ \theta_y &= u_{,z}, \quad \theta_x = -v_{,z}. \end{aligned} \tag{1}$$

As derivadas temporais e espaciais empregadas na formulação são definidas explicitamente por

$$\dot{u}(z,t) = \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, \qquad \dot{v}(z,t) = \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}, \qquad \dot{w}(z,t) = \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

$$u_{,z} = \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}, \qquad v_{,z} = \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}, \qquad w_{,z} = \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \tag{3}$$

$$u_{,zz} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}, \qquad v_{,zz} = \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \tag{4}$$

As segundas derivadas definem as curvaturas de flexão. A cinemática de von Kármán introduz a deformação axial da linha média [3].

$$\varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2}\left(u_{,z}^2 + v_{,z}^2\right) \tag{5}$$

Sob as hipóteses de Euler–Bernoulli, a energia cinética translacional do eixo e do disco pode ser escrita de forma compacta como

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\, A(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, dz + \frac{1}{2} m_d(\dot{u}_d^2 + \dot{v}_d^2) + T_{d,\mathrm{rot}} \tag{6}$$

Nessa expressão, ρA é a massa linear, m_d é a massa do disco e $T_{d,rot}$ reúne sua energia rotacional e giroscópica. A energia potencial contém flexão e estiramento axial moderado [3]:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L E\, I\left(u_{,zz}^2 + v_{,zz}^2\right) dz + \frac{EA}{8L}\left[\int_0^L \left(u_{,z}^2 + v_{,z}^2\right)\, dz\right]^2 \tag{7}$$

O primeiro termo descreve a flexão; o segundo produz rigidez dependente da deformação pela cinemática de von Kármán. A dissipação distribuída é representada por [3]:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\int_0^L c_t\, (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, dz \tag{8}$$

As equações são obtidas pelo princípio de Hamilton estendido [3]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\ dt + \int_{t_0}^{t_1} (\delta W_{\mathrm{ext}} - \delta W_{\mathrm{diss}})\ dt = 0 \tag{9}$$

As equações completas dos deslocamentos transversais incluem as ações concentradas do disco e dos AMBs. A força pontual é representada por uma distribuição de Dirac, enquanto o momento concentrado aparece por meio de sua derivada espacial; essa escrita distributiva permite incorporar as ações localizadas no modelo contínuo [6,7]:

$$\begin{aligned}
\rho A\, u_{,tt} + c_t u_{,t} + EI\, u_{,zzzz} - N(t) u_{,zz} &= f_x(z,t) + \mathcal{F}_{d,u}(t)\, \delta(z - z_d) \\
&\quad + \mathcal{M}_{d,u}(t)\, \delta'(z - z_d) + F_{x,1}^{\mathrm{AMB}}(t)\, \delta(z) + F_{x,3}^{\mathrm{AMB}}(t)\, \delta(z - L), \\
\rho A\, v_{,tt} + c_t v_{,t} + EI\, v_{,zzzz} - N(t) v_{,zz} &= f_y(z,t) + \mathcal{F}_{d,v}(t)\, \delta(z - z_d) \\
&\quad + \mathcal{M}_{d,v}(t)\, \delta'(z - z_d) + F_{y,1}^{\mathrm{AMB}}(t)\, \delta(z) + F_{y,3}^{\mathrm{AMB}}(t)\, \delta(z - L).
\end{aligned} \tag{10a,b}$$

As equações são discretizadas mediante aproximações das derivadas espaciais por diferenças finitas [8], resultando no sistema semidiscreto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}_g(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_{\mathrm{AMB}}\, \mathbf{f}_m(\mathbf{q}_b, i_b, \mathbf{i}_c) \tag{11}$$

As matrizes M, C, G e K representam massa, amortecimento, giroscopia e flexão; f_g é a contribuição geométrica e f_m contém as forças dos AMBs, dependentes do deslocamento q_b e das correntes de polarização i_be controle i_c [2]. O vetor $\boldsymbol{q}$ preserva os deslocamentos nodais nos dois planos. Essa estrutura matricial segue formulações usuais de dinâmica de rotores e AMBs [1,2,6].

Para cada par de eletroímãs opostos, emprega-se a lei não linear força–corrente–entreferro [2].

$$F_m(q_b, i_c) = k_m \left[\frac{(i_b+i_c)^2}{(g_0-q_b)^2} - \frac{(i_b-i_c)^2}{(g_0+q_b)^2}\right] \quad (12)$$

Nesta expressão, a força é puramente eletromagnética e sem contato. Não se inclui uma lei de impacto ou contato rotor–estator; a integração é encerrada antes dessa condição, quando o deslocamento atinge 85% do entreferro.

SDRE (*State-Dependent Riccati Equation*) é uma extensão local do regulador quadrático linear para sistemas não lineares [5]. A cada atualização, a planta é escrita na forma de coeficientes dependentes do estado, a equação algébrica de Riccati é resolvida no estado corrente e o ganho resultante define as correntes diferenciais mantidas até a atualização seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{i}_c, \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{i}_c = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (13)$$

em que Q e R ponderam os estados e o esforço de controle. Os parâmetros da Tabela 1 representam um rotor esbelto de aço e uma suspensão magnética compatível com os modelos de referência [1,2]; dimensões, escalas e pesos são escolhas numéricas deste estudo. A solução local da Riccati não constitui prova de estabilidade global.

Tabela 1. Parâmetros empregados na simulação. Em Q, cada trio corresponde aos nós dos mancais, ao nó do disco e aos demais nós; (Q_q) pondera deslocamentos e $(Q_{\dot{q}})$ velocidades, com repetição nos planos (u) e (v).

Grupo	Parâmetros e valores	Grupo	Parâmetros e valores
Eixo	L=1,0 m; d=10 mm; E=210 GPa; rho=7800 kg/m3	Seção	I=4,909e-10 m4; EI=103,08 N m2
Disco	zd=0,50 m; Ro/Ri=80/20 mm; bd=20 mm; md=2,941 kg	Operação	Omega=120 rad/s; n=21; dt=5e-5 s; tf=6 s
AMB	g0=1,5 mm; ib=15 A; |ic|max=5 A; km=3e-7 N m2/A2	SDRE	Ts=1e-4 s; atualizaÃ§Ã£o: 10 Ts
Q (84 x 84)	diag(Q_q): 8,002e7; 4,40e5; 4,00e4; diag(Q_qdot): 100,5; 6; 1	R (4 x 4)	R=0,04 I4

A malha possui n=21 nós físicos, com o disco no nó central. A primeira frequência do modelo é ω1=191,28 rad/s (30,44 Hz). Adota-se A=5 mm e u(z,0)=A sen(πz/L), v(z,0)=0, u̇(z,0)=0 e v̇(z,0)=0,15Aω1 sen(πz/L), cuja velocidade máxima é 0,14346 m/s. A geometria de von Kármán permanece ativa. Sua relevância é medida pelo índice adimensional ηg=||fg(q)||2/||Kq||2, razão entre as normas da força geométrica não linear e da força elástica linear; ηg≈0 indica resposta quase linear, e valores crescentes indicam maior participação geométrica. O entreferro é 3 mm e o limite de corrente, 10 A. Comparam-se a planta sem controle e com SDRE por até 4 s. Considera-se proximidade do equilíbrio quando, nos 5% finais, |ud| e |vd| permanecem abaixo de 0,05 mm.

Resultados

Sem controle, o limite de segurança foi alcançado em 0,002 s. O índice inicial ηg=0,173 confirma contribuição geométrica relevante, e a Figura 2(a) mostra a rápida perda da margem do entreferro.

Com SDRE, a integração completou 4 s. O uso máximo do entreferro foi 15,3%, a corrente máxima foi 4,23 A e a tensão máxima, 93,3 MPa. Ao final, u_d =−0,00912 mm e v_d=0,00699 mm. Nos 5% finais, os máximos foram 0,0127 mm e 0,0185 mm, abaixo da tolerância de 0,05 mm; a razão terminal do estado foi 0,00488.

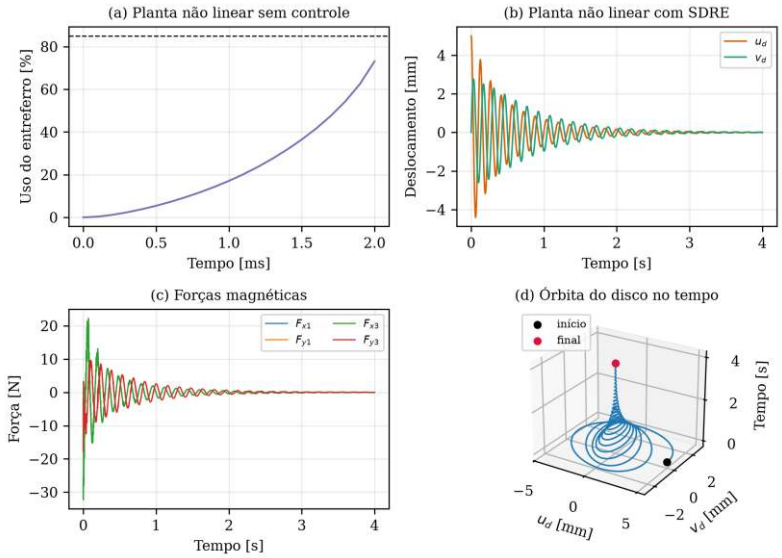

Figura 2. Resposta orbital não linear: (a) uso do entreferro sem controle; (b) deslocamentos u_d e v_d com SDRE; (c) forças dos AMBs; e (d) trajetória tridimensional (u_d,v_d,t), com início e final da convergência.

As vistas 2D e 3D da Figura 3 mostram a redução da deformação nos dois planos. A condição inicial em quadratura gera uma órbita elíptica, enquanto todos os 21 nós evoluem em direção à configuração indeformada.

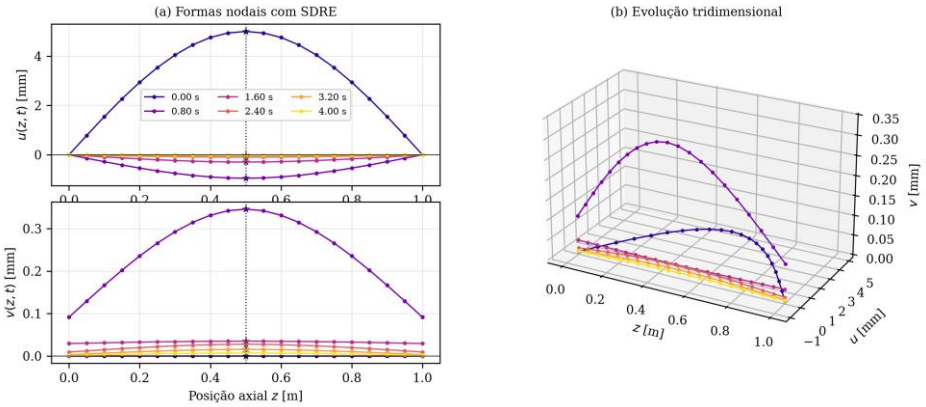

Figura 3. Evolução da linha elástica discretizada em 21 nós com SDRE durante 4 s: (a) formas nodais nos planos u e v; e (b) vista tridimensional. As estrelas destacam o nó do disco.

O histórico espacial e a órbita convergente confirmam que o SDRE reconduz ambas as componentes da resposta não linear à vizinhança do equilíbrio.

Discussão

Sem realimentação, a rigidez de posição da suspensão polarizada amplia o afastamento [2]. A velocidade inicial em quadratura gera uma órbita elíptica em vez da trajetória retilínea obtida para componentes em fase. Com SDRE, os coeficientes dependentes do estado são atualizados e a espiral converge para a origem. O valor ηg=0,173 confirma contribuição geométrica relevante, mas o resultado permanece local e não constitui prova de estabilidade global ou robustez.

Conclusões

A formulação reuniu flexão e estiramento do eixo, dinâmica do disco e forças magnéticas. Na condição orbital não linear analisada com 21 nós, a planta sem controle perdeu rapidamente a margem do entreferro, enquanto o SDRE manteve a trajetória admissível e reduziu u_d e v_d para menos de 0,05 mm no trecho final. Conclui-se que o SDRE apresenta capacidade local de restaurar a vizinhança do equilíbrio no domínio simulado, sem implicar estabilidade global ou robustez.

Referências

1. Genta G. Dynamics of rotating systems. New York: Springer; 2005.
2. Schweitzer G, Maslen EH, editors. Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery. Berlin: Springer; 2009.
3. Nayfeh AH, Pai PF. Linear and nonlinear structural mechanics. Hoboken: Wiley-Interscience; 2004.
4. Siva Srinivas R, Tiwari R. Application of active magnetic bearings in flexible rotordynamic systems: a state-of-the-art review. Mech Syst Signal Process. 2018;106:537-72.
5. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey. IFAC Proc Vol. 2008;41(2):3761-75.
6. Friswell MI, Penny JET, Garvey SD, Lees AW. Dynamics of rotating machines. Cambridge: Cambridge University Press; 2010. doi:10.1017/CBO9780511780509.
7. Palmeri A, Cicirello A. Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. Int J Solids Struct. 2011;48(14-15):2184-95. doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.03.024.
8. Fornberg B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. Math Comp. 1988;51(184):699-706. doi:10.1090/S0025-5718-1988-0935077-0.